Internet et la théorie des graphes

Jean-Claude Bermond, Joanna Moulierac

ÉTUDE DE DOCUMENTS 2

Internet et la théorie des graphes

> Par Jean-Claude Bermond et Joanna Moulierac, chercheurs du projet Mascotte, commun au laboratoire I3S (CNRS/Université de Nice Sophia Antipolis) et au centre INRIA Sophia Antipolis Méditerranée.

La théorie des graphes constitue un domaine des mathématiques qui s'est développé au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie (génome), les sciences sociales (modélisation des relations) et le transport (réseaux routiers, électriques, etc.).

Le cycle eulérien et le cycle hamiltonien

Historiquement, on attribue au mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1735) l'origine de la théorie, avec le problème de savoir s'il existe un parcours empruntant chacun des ponts de Koenisberg une seule et unique fois. Des algorithmes simples pour trouver un tel parcours existent et reviennent à chercher un cycle eulérien dans un graphe (ensemble de sommets et d'arêtes) où un pont (une arête du graphe) relie deux quartiers (les sommets). En revanche, trouver un cycle dit hamiltonien (du nom du mathématicien et astronome irlandais William Rowan Hamilton, en 1857) qui ne passe qu'une seule fois par chaque sommet est un problème extrêmement difficile. Sa résolution permettrait de remporter le prix Clay à un million de dollars. Sur l'exemple du **DOC A**, où les sommets représentent les îles, et les arêtes, les ponts reliant ces îles, il existe un cycle eulérien, mais pas de cycle hamiltonien[1].

Dans le **DOC C**, le graphe **1** représente un graphe complet à 6 sommets, avec les 15 arêtes possibles reliant les sommets deux à deux ; le graphe **2**, un cycle à 6 sommets qui est aussi un cycle hamiltonien du graphe **1** ; le graphe **3**, un arbre en étoile couvrant les 6 sommets du graphe **1**, mais n'admettant pas un tel cycle, et le graphe **4,** une grille 3×3 à 9 sommets. Le lecteur pourra déterminer quand une grille $n \times n$ admet un cycle hamiltonien[2].

Réseaux internet et graphes « petit-monde »

Ces dernières années, la théorie des graphes a connu un regain d'intérêt pour la modélisation de nombreux problèmes en informatique. En effet, un graphe peut modéliser un programme, un algorithme, mais aussi divers types de réseaux. Par exemple, le réseau internet peut être modélisé par un graphe dont les sommets représentent des routeurs ou des ordinateurs, et les arêtes entre deux sommets un lien de communication (fibre optique). Le graphe du Web a pour sommets les pages Web, une arête entre deux sommets indiquant une citation d'une page vers l'autre. Enfin, on peut évaluer sa popularité sur un réseau social en comptant le nombre d'arêtes qui nous connectent à nos amis.

Ces réseaux ont des propriétés particulières, notamment celle d'être des graphes « petit-mondes ». Cette propriété indique l'existence de chaînes de relations très courtes

[1] Le cycle eulérien est (AB-BC-CE-ED-DB-BE-EA).

[2] La grille 4 n'en admet pas et seules les grilles $n \times n$ avec n pair en admettent un.

entre deux sommets. Dans un réseau social, cela veut dire qu'une personne connaît quelqu'un qui connaît quelqu'un… qui connaît quelqu'un qui vous connaît. Le psychologue américain Stanley Milgram a été le premier, en 1967, à définir cette propriété par l'expérience suivante. Il a demandé à des personnes différentes de faire parvenir une lettre à un individu donné en demandant à un de leurs amis (qu'ils pensaient capables d'atteindre rapidement le destinataire) de la transmettre. En moyenne, les lettres ont été acheminées par seulement six personnes. Plus récemment, il a été montré que la distance moyenne entre les sommets du graphe du Web serait inférieure à 20 et que celle du réseau social Facebook serait inférieure à 5. Les graphes « petit-monde » ont aussi la propriété de contenir un grand nombre de sous-graphes quasi complets (souvent, vos amis se connaissent aussi), ce qui n'est pas le cas des graphes aléatoires. Un exemple de graphe petit-monde est présenté dans le **DOC B**.

Comment calculer un plus court chemin ?

Sur internet, lorsqu'un ordinateur envoie un message à un autre ordinateur, le problème est de trouver une route, de préférence la plus rapide ou la plus courte possible pour arriver à destination. Lorsque l'on connait la cartographie d'un réseau, un des algorithmes utilisés afin de trouver le plus court chemin dans un graphe, avec des poids positifs sur les arêtes, est celui de Dijkstra (du nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra). L'idée générale de cet algorithme, détaillé sur le **DOC C 3**, est qu'un sous-chemin d'un plus court chemin est aussi le plus court chemin entre ses extrémités. À chaque étape, on choisit parmi les sommets non encore sélectionnés celui de plus petite distance. Il est ensuite ajouté à l'ensemble S des sommets déjà choisis. Puis les distances des autres sommets sont actualisées en utilisant uniquement des chemins *via* les sommets de S. Le tableau du **DOC D** représente les cinq étapes nécessaires à l'algorithme pour calculer l'arbre des plus courts chemins de A vers tous les autres sommets du graphe.

Le problème réel est évidemment plus compliqué, car on ne connaît pas actuellement la cartographie de l'internet. D'autres algorithmes de routage sont donc utilisés ou sont à inventer.

SAVOIR +

- http://interstices.info/jcms/c_5776/quest-ce-quun-algorithme
- http://interstices.info/jcms/c_21832/p-np-un-probleme-a-un-million-de-dollars
- http://interstices.info/jcms/c_15578/le-plus-court-chemin
- http://interstices.info/jcms/c_15921/internet-le-conglomerat-des-reseaux

Figure 1 : le graphe des îles Canaries admet un cycle Eulérien mais pas de cycle Hamiltonien

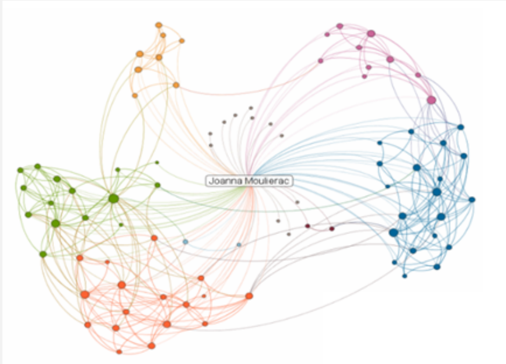
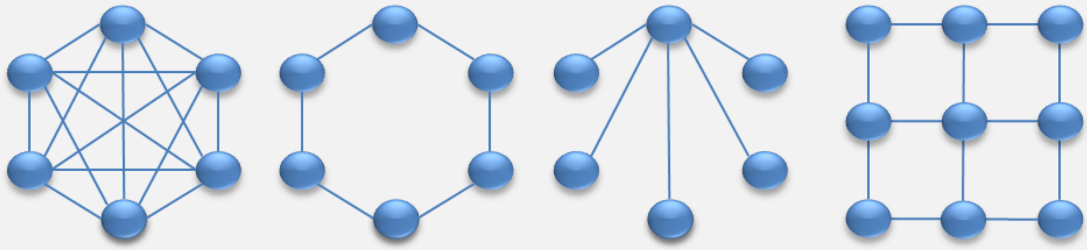
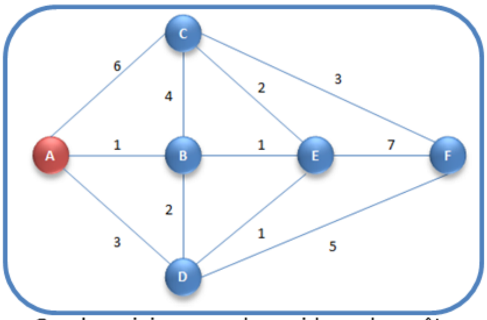


Figure 2 : le graphe petit-monde des contacts *linkedIn* de l'un des auteurs

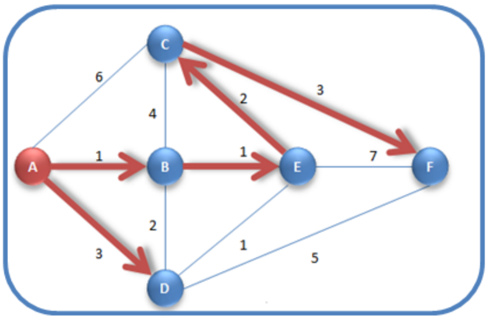


(a) Graphe complet (b) Cycle (c) Arbre (d) Grille 3x3

Figure 3 : différents types de graphes



Graphe origine avec des poids sur les arêtes indiquant la distance entre les 2 sommets



Arbre des plus courts chemins depuis A trouvé après l'étape 5 de l'algorithme de Dijkstra

De	Vers	Chemin	Distance
Etape 1 : Plus courts chemins depuis A			
A	B	AB	1
A	C	AC	6
A	D	AD	3
A	E	-	∞
A	F	-	∞
Etape 2 : B choisi			
AB	C	~~AC~~ → ABC	~~6~~→ 5
AB	D	AD	3
AB	E	- → ABE	~~∞~~ → 2
AB	F	-	∞
Etape 3 : E choisi			
ABE	C	~~ABC~~ → ABEC	~~5~~ → 4
ABE	D	AD	3
ABE	F	- → ABEF	~~∞~~ → 9
Etape 4 : D choisi			
ABED	C	ABEC	4
ABED	F	~~ABEF~~ → ADF	~~9~~ → 8
Etape 5 : C choisi			
ABEDC	F	~~ADF~~ → ABECF	~~8~~ → 7

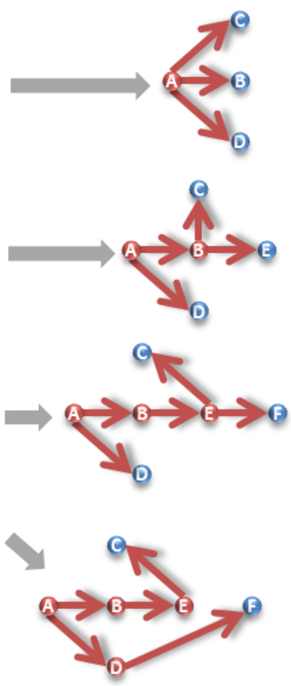


Figure 4 : trouver un plus court chemin dans un graphe